

# Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler Makaleler

- Araştırma / Popülasyon Büyüme Hızı ve Popülasyon Büyüklüğünün Doğrusal Olmayan Regresyon Modeli ile Tahmini
- Derleme / Narkolepsi ve Oreksinler
- Olgü Sunumu / El Yerleşimli Lipomatöz Tümörlerde Eksizyon Öncesinde Manyetik Rezonans Görüntülemesi Gereklidir mi?
- Olgü Sunumu / Seronegatif Spondiloartropatili Bir Olguda Biyolojik Ajan Tedavisi Sırasında Psöriazis Gelişimi
- Olgü Sunumu / Distal Falanks Yerleşimli Epidermal Kist
- Yazı Dizisi / Genç Müsabaka Sporcularında Ani Ölümler - III

# Popülasyon Büyüme Hızı ve Popülasyon Büyüklüğünün Doğrusal Olmayan Regresyon Modeli ile Tahmini\*

The Estimation of Population Growth Rate and Population Size with Non-Linear Regression Model

Gürol ZIRHLIOĞLU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Yrd. Doç. Dr.,  
Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van  
Meslek Yüksekokulu,  
VAN

\*Bu çalışma, XI. Ulusal  
Biyostatistik Kongresi'nde  
sunulmuştur.

## ÖZET

**Giriş:** Demografik çalışmaların temel konularından biri olan popülasyon büyüme hızı, popülasyon büyüklüğü ve zaman değişiminden etkilenir. Popülasyon çalışmalarında veri ve teori arasındaki ilişki için kantitatif modeller kullanılır. Bunlar matematiksel ve istatistiksel modellerdir. İstatistiksel modeller genellikle popülasyon büyüklüğünü ve yaşam oranını hesaplamak amacıyla kullanılır. Popülasyon büyüme hızını belirtmek amacıyla kullanılan modeller doğum, ölüm ve geçerli popülasyon büyüklüğü ile ifade edilmektedir. Bu modeller doğrusal model değildir.

**Amaç:** Bu çalışmada, doğrusal olmayan regresyon modeli ile popülasyon büyüme hızı ve popülasyon büyüklüğünün tahmin edilmesi amaçlanmıştır.

**Gereç ve Yöntemler:** Türkiye İstatistik Kurumunun 1935-1990 yılları arasındaki nüfus verileri kullanılmıştır. Çalışmada doğrusal olmayan bir regresyon modeli kullanılarak popülasyon büyüme modeline ait bir regresyon denklemi elde edilmiştir. Bu denklemdeki katsayıların anti logaritmaları alınarak yoğunluğa bağlı olmayan popülasyon büyüme hızı ve  $t-1$  zaman adımıdaki popülasyon büyüklüğü tahmin edilmiştir.

**Bulgular:** Doğrusal olmayan regresyon analizi sonucunda popülasyon büyüme hızı ve popülasyon büyüklüğü hesaplanmıştır. Popülasyon büyüme modeli ile  $t > 0$  değerleri için gelecek zaman adımıdaki popülasyon büyüklüğü ve  $t < 0$  değerleri için önceki zaman adımıdaki popülasyon büyüklüğü tahmin edilmiştir.

**Sonuç:** Popülasyon büyüme hızı değerini elde etmek için üssel büyüme modeli popülasyon çalışmalarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu modelde ilk ve son sayım yıllarındaki popülasyon değerleri kullanılır. Ancak, doğrusal olmayan regresyon modelinde tüm sayım yıllarına ait değerler kullanılarak elde edilen regresyon denkleminde hem popülasyon başlangıç değeri hem de popülasyon büyüme hızı hesaplanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Doğrusal model, nüfus artış hızı

**İletişim Adresi:**  
Yrd. Doç. Dr.  
Gürol ZIRHLIOĞLU  
Tel: 0432 225 10 25  
E-mail: gurol@yyu.edu.tr

**SUMMARY**

**Objectives:** Population growth rate which is one of the basic subjects of demographic studies influences by the change in population size and time. Quantitative models are used for relation between data and theory in the population studies. These models are mathematical and statistical models. Statistical models use generally used order to compute population size and survival rate. Models that are used to denote population growth rate are identified by the relation among birth, death and current population size. These models are not linear model. The aim of the study was to estimate the population growth rate and population size parameters by non-linear regression model.

**Material and Methods:** Turkish Statistical Institute data gathered between 1935 and 1990 have been used. In this study, a regression equation which belongs to population growth model has been obtained by using a non-linear regression model. The population growth rate independent of density and in the  $t-1$  time step population size has been estimated after taking anti-logarithm of parameters in this equation.

**Results:** Population growth rate and population size was computed in the results of non-linear regression analysis. By the population growth model, for  $t > 0$  values the population size in the future time steps and for  $t < 0$  values in the pre time steps population size has been estimated.

**Conclusion:** Exponential model is often used in population studies for to obtain population growth rate value. First census year and last census year population values are used in the this model. But in non-linear regression model, both population beginning value and population growth rate value are estimated in the regression

model which obtained by considering all the census year data.

**Key Words:** *Linear models, population growth*

**GİRİŞ**

Popülasyon büyümesinin incelenmesi demografik çalışmaların ana konularından biridir. Çevre koşullarına bağlı olarak popülasyon miktarında değişimler meydana gelebilir. Bu durum uygun koşullarda popülasyon miktarında artış şeklinde ortaya çıkarken, uygun olmayan koşullarda ise azalma şeklinde ortaya çıkabilmektedir. Uygun çevre koşulu durumu ise canlı türlerine göre farklılık gösterebilen bir kavramdır. Popülasyon büyümesi doğum, ölüm ve göç olaylarının etkisi altındadır. Popülasyon büyüme hızı ise zaman ve popülasyon miktarındaki değişimden etkilenen bir değerdir (1-3).

Popülasyon çalışmalarında veri ve teori arasında ilişki kurmak için kantitatif modeller kullanılır. Bu modellerin bazıları matematiksel olup, çoğunlukla basitleştirilerek popülasyon davranışlarını açıklamak için kullanılır. Bazı modeller ise istatistiksel ve genellikle popülasyon miktarının tahmini, yaşam oranı veya farklı modellerin karşılaştırılması gibi işlemleri gerçekleştirmek için kullanılmaktadır (4).

Popülasyon büyüme hızının saptanabilmesi için kullanılacak modeller doğum, ölüm ve geçerli popülasyon büyüklüğü arasındaki ilişki ile belirlenir. Popülasyon büyümesi yoğunluğa bağlı büyüme ve yoğunluğa bağlı olmayan büyüme olmak üzere iki grupta incelenebilir.

Yoğunluğa bağlı olmayan büyüme modelleri sürekli zaman modelleri ve kesikli zaman modelleri şeklinde gruplandırılabilir. Üssel büyüme ve "logistic" bu zamanlara ait temel modellerdir (1,2,5,6).

Popülasyon büyüme hızı,  $R$ , çeşitli ekolojik ve demografik parametrelerin hesaplanmasında kullanılan önemli bir değerdir. Bu değer herhangi bir  $t$  ve  $t+1$  zamanları arasında meydana gelen değişimi ifade eder. Eğer  $R < 1$  ise popülasyonda azalma olduğu;  $R = 1$  ise popülasyonun dengede olduğu;  $R > 1$  ise popülasyonda artış olduğu sonuçları elde edilir (1,7).

Popülasyon büyüme hızının belirlenmesinde  $t$  zamanındaki birey sayısı,  $t+1$  zamanındaki birey sayısı ve popülasyon büyüme hızının belirleneceği zaman aralığı değerleri kullanılmaktadır. Herhangi bir  $t$  zamanındaki popülasyon büyüklüğü bağımlı değişken; zaman bağımsız değişken; popülasyon büyüme hızı ve popülasyon başlangıç değeri ise parametrelerdir (2). İki değişken arasındaki ilişki her zaman doğrusal olmayabilir. Doğrusal modellerde her parametrenin üssünün 1 olması, parametrenin modellerde üs olarak yer almaması ve parametrelerin diğer parametreler ile çarpılıp bölünmesi söz konusudur (8).

Doğrusal olmayan modellerde bağımlı değişken bağımsız değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu değildir. Regresyon analizindeki standart varsayımlardan biri tanımlanan verilere ait modelin doğrusal olmasıdır. Ancak bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişki her zaman doğrusal olmadığı için, doğrusal olmayan modeller uygun dönüşümler ile doğrusal yapılabilirler (8-11).

Yapılan çalışmada, yoğunluğa bağlı olmayan popülasyon büyüme hızı ve  $t+1$  zamandaki popülasyon büyüklüğü doğrusal olmayan bir regresyon modeli kullanılarak tahmin edilmiştir.

## GEREÇ VE YÖNTEMLER

Çalışmada kullanılan yöntemlerin daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla Türkiye İstatistik Kurumunun verilerinden yararlanılarak

1935-1990 yıllarına ait nüfus bilgi kayıtları kullanılmıştır (12). Bu veriler Tablo 1'de görülmektedir.

**Tablo 1.** 1935-1990 yıllarına ait nüfus verileri.

Zaman aralığı (1935-1990)	Birey sayısı ( $n_t$ )
1	16.158.018
2	17.820.950
3	18.790.174
4	20.947.188
5	24.064.763
6	27.754.820
7	31.391.421
8	35.605.176
9	40.347.719
10	44.736.957
11	50.664.458
12	56.473.035

## Popülasyon Büyüme Hızı

Doğum ve ölüm olayları birey sayısı olarak belirtilmekten çok, oran olarak ifade edilirler. Artan popülasyon büyüme hızı  $R$  ile gösterilir ve bir popülasyona ait sınırlı büyüme hızı olarak ifade edilir. Yoğunluğa bağlı olmayan üssel büyüme kesikli zamanlar için

$$N(t) = N(0)R^t \quad (1)$$

eşitliği ile elde edilir (13). Burada  $N(t)$ ,  $t$  zamanındaki popülasyon büyüklüğünü,  $N(0)$  ise başlangıç zamanındaki popülasyon büyüklüğünü ifade etmektedir. Bu eşitlik dikkate alınarak popülasyon büyüme hızının belirlenebilmesi için

$$R = \left( \frac{N(t)}{N(0)} \right)^{\frac{1}{t}} \quad (2)$$

ifadesi kullanılır. Sürekli zamanlar için yoğunluğa bağlı olmayan üssel büyüme ise

$$N(t) = N(0)e^{rt} \quad (3)$$

ifadesi ile belirtilir (13). Burada  $r$  anlık büyüme hızı olup, aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$r = \frac{\ln N(t) - \ln N(0)}{t} \quad (4)$$

iki değerin logaritmaları arasındaki fark, bu iki değerin oranlarının logaritmasına eşit olduğuna göre yukarıdaki eşitlik

$$rt = \ln \left( \frac{N(t)}{N(0)} \right) \quad (5)$$

olarak yazılabilir. Elde edilen bu ifade üssel olarak yeniden yazıldıktan sonra her iki tarafının  $t$  inci dereceden karekökü alındığında,

$$e^r = \left( \frac{N(t)}{N(0)} \right)^{\frac{1}{t}} \quad (6)$$

sonucu elde edilir. Bu denklem popülasyon büyüme hızı  $R'$ 'ye eşittir (13).

### Doğrusal Olmayan Regresyon Modeli

Popülasyon büyüme modelinde yer alan  $N(t)$  zamana bağımlı bir değişkendir.  $N(0)$  ve  $R$  ise parametrelerdir. Bu model üssel bir ifade olduğu için doğrusal olmayan bir modeldir.

$$Y = ab^x \quad (7)$$

şeklinde belirtilen bir regresyon modelinde katsayıların hesaplanabilmesi için denklem logaritmik bir dönüşüme tabi tutulur (7, 8, 10, 11, 13, 14).

Bu durumda denklem,

$$\log Y = \log a + x \log b \quad (8)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada  $\log Y = Z$ ;  $\log a = A$  ve  $\log b = B$  şeklinde düşünülürse,

$$Z = A + Bx \quad (9)$$

eşitliği yazılabilir. Elde edilen bu eşitlik basit bir doğrusal denklemdir. Buna göre  $B$  katsayısı,

$$B = \frac{\sum xZ - \frac{\sum x \sum Z}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \quad (10)$$

eşitliği ile elde edilebilir (8,10).  $B$  katsayısı elde edildikten sonra denklemde yer alan  $A$  katsayısının hesaplanması için,

$$A = \bar{Z} - B\bar{x} \quad (11)$$

eşitliği kullanılır. Regresyon katsayılarının elde edilmesinden sonra bu katsayıların antilogaritmaları hesaplanarak esas denklem elde edilir.

Yapılan çalışmada popülasyon büyüme modeli olan,

$$N(t) = N(0)R^t$$

eşitliği logaritmik dönüşüme tabi tutularak,

$$\log N(t) = \log N(0) + t \log R \quad (12)$$

denklemini elde edilmiştir (2,13). Daha sonra  $\log N(t) = Z$ ;  $\log N(0) = A$  ve  $\log R = B$  şeklinde ifade edilerek 9 numaralı denklem elde edilmiştir. Elde edilen doğrusal modeldeki katsayılar hesaplandıktan sonra,  $B$  değerinin antilogaritması yaklaşık popülasyon büyüme hızını,  $A$  değerinin antilogaritması ise  $t-1$  zamanındaki popülasyon büyüklüğüne ait tahmini vermiştir.

### BULGULAR

Tablo 1'de verilen değerlere göre popülasyon büyüme hızı 2 numaralı eşitlik ile hesaplanarak  $R = 1.126$  olarak hesaplanmıştır. Popülasyon büyüme hızı modeli 1 numaralı denkleme göre yazılarak

$$N(1990) = N(1955)R^5$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitlik doğrusal olmayan bir regresyon modeli olup, bu modele göre çözüm yapabilmek için hesaplanan değerler Tablo 2'de görülmektedir.

Tablo 2'de belirtilen değerlere göre regresyon denklemine ait  $B$  katsayısı 0.0514 olarak elde edilmiştir.  $A$  katsayısı ise 7.1363 olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu değerlere göre regresyon denklemini,

**Tablo 2.** Doğrusal olmayan regresyon modeli katsayıların hesaplanmasında kullanılan değerler.

Zaman aralığı (1935-1990) (x)	Birey sayısı (Y)	log (Y)= Z	xZ	x <sup>2</sup>
1	16.158.018	7.20839	7.20839	1
2	17.820.950	7.25093	14.50186	4
3	18.790.174	7.27393	21.82179	9
4	20.947.188	7.32113	29.28452	16
5	24.064.763	7.38138	36.90690	25
6	27.754.820	7.44334	44.66004	36
7	31.391.421	7.49681	52.47767	49
8	35.605.176	7.55151	60.41208	64
9	40.347.719	7.60582	68.45238	81
10	44.736.957	7.65067	76.50670	100
11	50.664.458	7.70470	84.75170	121
12	56.473.035	7.75184	93.02208	144
<b>Toplam</b>	<b>78</b>	<b>89.64045</b>	<b>590.00611</b>	<b>650</b>
<b>Ortalama</b>	<b>6.5</b>	<b>7.4700</b>		

$$Z = 7.1363 + 0.0514x$$

olarak düzenlenmiştir. Esas denklemin elde edilebilmesi için belirtilen bu katsayıların antilogaritmaları hesaplanarak denklem üssel formda yazılmıştır. Buna göre,

$$Z = (13685353)(1.126)^x$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu denklem popülasyon büyüme modeline göre yeniden yazılarak,

$$N(t) = (13685353)(1.126)^t$$

ifadesi elde edilmiştir. Buna göre, 13.685.353 değeri  $t$  değeri sıfır olduğunda  $N(t)$ 'nin alacağı değerdir. Bu da yaklaşık olarak  $t-1$  zaman adımında yer alan yaklaşık popülasyon büyüklüğünü göstermektedir. Modelin diğer katsayısı olan 1.126 değeri ise yaklaşık popülasyon büyüme hızı ( $R$ ) değeridir.

## TARTIŞMA

Popülasyon büyüme hızı değerinin elde edilebilmesi için üssel büyüme modeli popülasyon çalışmalarında sıklıkla kullanılmaktadır (1,2). Bağımlı değişken ile bir ya da birden fazla sayıdaki bağımsız değişken arasındaki ilişkinin ayrıntılı olarak incelen-

mesi, bağımlı değişkene ait değerlerin en iyi şekilde tahmin edilmesinde önemli etkiye sahiptir (15). Çalışmada üssel büyüme modeli yerine doğrusal olmayan bir regresyon modeli kullanılarak yaklaşık popülasyon büyüme oranı değeri ve yaklaşık popülasyon büyüklüğü değerleri elde edilmiştir. Türkiye İstatistik Kurumu tarafından belirtilen 1935-1990 yılları arasındaki nüfus değerlerine göre üssel büyüme modeli ve doğrusal olmayan regresyon modeli ile elde edilen büyüme hızı değerleri birbirlerine yakın sonuçlar vermiştir. Büyüme hızı değerlerinin 1'den büyük olması ( $R > 1$ ) popülasyon miktarında artış olduğunu göstermiştir (13).

Üssel büyüme modelinde ilk sayım yılındaki popülasyon büyüklüğü ile son sayım yılındaki popülasyon büyüklüğü değerleri kullanılarak popülasyon büyüme hızı değeri elde edilirken, doğrusal olmayan regresyon modeli kullanılarak yapılan hesaplamalarda bütün sayım yıllarına ait veriler kullanılmıştır. Böylece aynı regresyon denklemi üzerinde başlangıç popülasyon değeri ( $t = 0$  anında) ve popülasyon büyüme hızı değeri elde edilmiştir. Aynı şekilde tüm sayım yıllarındaki değerler kullanılarak  $t-1$  zamanındaki yaklaşık popülasyon büyüklüğü değeri de tahminlenmiştir.

**SONUÇ**

Elde edilen regresyon denkleminde 13.685.353 değeri başlangıç değeri olarak dikkate alınırsa  $t$ 'nin alabileceği herhangi bir değere göre istenilen zaman adımındaki nüfus miktarı tahminlenebilir. Eğer  $t > 0$  ise gelecek zaman adımlarındaki popülasyon büyüklüğü,  $t < 0$  ise başlangıç değerinin yer aldığı zaman adımından önceki zamanlara ait popülasyon büyüklüğü değerleri tahmin edilebilmektedir. Ayrıca, çalışmada kullanılan zaman değerleri için yapılan hesaplamalarda doğrusal olmayan modellerde elde edilen nüfus büyüklüğü değerlerinin gerçek değerlere daha yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

**KAYNAKLAR:**

1. Krebs CJ. Demographic techniques: Vital statistics. Ecology. 4<sup>th</sup> ed. New York: HarperCollins, Collage; 1994. p.175-84.
2. Akçakaya HR, Burgman MA, Ginzburg LR. Population growth. In: Akçakaya HR, Burgman MA, Ginzburg LR, eds. Applied Population Ecology. 2<sup>nd</sup>ed. Sunderland: Sinauer Associates; 1999. p.7-9.
3. Krivan V, Havelka J. Leslie model for predatory Gall-midge population. Ecological Modelling 2000;126:73-77.
4. Mills LS, Doak DF, Wisdom MJ. Reliability of conservation actions based on elasticity analysis of matrix models. Conservation Biology 1999;13(4):815-29.
5. Rickflles RE. Population growth and regulation. In: Rickflles RE, ed. The Economy of Nature: A Textbook in Basic Ecology. 3<sup>rd</sup> ed. New York; WH Freeman, 1991. p.262-4.
6. Shuterland WJ. Why census? In: Shuterland WJ, ed. Ecological Census Techniques: A Handbook. 1<sup>st</sup>ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1996. p.8-9.
7. Gotelli NJ, Ellison AM. Regression. In: Gotelli NJ, Ellison AM, eds. A Primer of Ecological Statistics. 1<sup>st</sup>ed. Sunderland; Sinauer Associates, 2004. p.275-9.
8. Alpar R. Çoklu doğrusal regresyon. Alpar, R, editör. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş-I. T. Baskı. Ankara; Bağırhan Yayınevi, 1997. p.188-9.
9. Weisberg S. Nonlinear regression. In: Weisberg S, ed. Applied Linear Regression. 3<sup>rd</sup> ed. New Jersey: John Wiley & Sons; 2005. p.233-4.
10. Düzgüneş O, Kesici T, Kavuncu O, Gürbüz F. Düz olmayan ilişkiler. Düzgüneş O, Kesici T, Kavuncu O, Gürbüz F, editörler. Araştırma ve Deneme Metodları (İstatistik Metodları II). Ankara; Ankara Üniversitesi Basımevi, 1987. p.354-60.
11. Chatterje S, Bertram P. Detection and correction of model violations: Simple linear regression. In: Chatterje S, Bertram P, eds. Regression Analysis By Example. 2<sup>nd</sup> ed. New York; John Wiley & Sons, 1991. p.31-6.
12. DİE. İstatistik Göstergeler, 1923-1998. T.C. Başbakanlık Devlet İstatistik Enstitüsü. Ankara; Devlet İstatistik Enstitüsü Matbaası, 2001. p.4-5.
13. Gotelli NJ. Exponential population growth. In: Gotelli NJ, ed. A Primer of Ecology. 3<sup>rd</sup> ed. Sunderland; Sinauer Associates, 2001. p.11-9.
14. Berry WD, Feldman S. Multiple regression in practice. In: Lewis-Beck MS, ed. Regression Analysis (International Handbooks of Quantitative Applications in the Social Science). 1<sup>st</sup>ed. Vol. 2. London; Sage Publication, 1993. p.210-3.
15. Doğan N, Özdamar K. [Chaid analysis and an application related with family planning]. Türkiye Klinikleri J Med Sci 2003;23(5):392-7.